Grundlagen

Freiheitsgrad

$$\boxed{f = n - b}$$

starrer Körper: $f = 6$
ebenes Pendel: $f = 1$

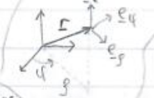
n: Σ der f der einz. Körper
b: # Bindungslagen (lin. unabh. Bindungs-Gl.)

Geschwindigkeit

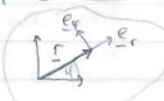
Geschwindigkeit: $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$
Schnelligkeit: $v = |\vec{v}|$
Beschleunigung: $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$

-) Karth. KoS: $\vec{r} = OP$; $\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z$

-) Zylinder KoS: $\vec{r} = \rho \underline{e}_\rho + z\, \underline{e}_z$
$\vec{v} = \dot{\rho}\, \underline{e}_\rho + \rho\dot{\varphi} e_\varphi + \dot{z}\, \underline{e}_z$
$v = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2}$
$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)e_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})e_\varphi + \ddot{z}\vec{e}_z$



-) Ebene Polar-Ko: $\vec{r} = r \cdot \underline{e}_r$
$\vec{v} = \dot{r} \cdot \underline{e}_r + r\dot{\varphi}\, \underline{e}_\varphi$
$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)e_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})e_\varphi$



$$\begin{pmatrix} \underline{e}_\rho = \cos\varphi\, \underline{e}_x + \sin\varphi\, \underline{e}_y \\ \underline{e}_\varphi = -\sin\varphi\, \underline{e}_x + \cos\varphi\, \underline{e}_y \end{pmatrix}$$

Kreisbewegung: (r = konst.) $\underline{a} = -r\dot{\varphi}^2 e_r + r\ddot{\varphi}\, \underline{e}_\varphi$
(wobei $r\dot{\varphi}^2 = \frac{v^2}{r}$)

Starre Körper

Einheitsvektor $\underline{e}$ herausfinden: $\underline{e} = \dfrac{\underline{r}_P - \underline{r}_Q}{|\underline{r}_P - \underline{r}_Q|}$

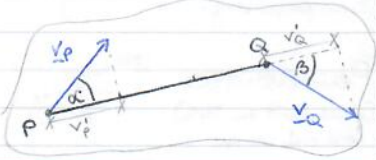
Satz des projizierten Geschwindigkeiten

(SdpG): $\boxed{\underline{v}_P \cdot \underline{PQ} = \underline{v}_Q \cdot \underline{PQ}}$

$v_P' = \underline{v}_P \cdot \underline{e}_{PQ} = \underline{v}_P \cdot \dfrac{\underline{PQ}}{|\underline{PQ}|}$

$v_P' = v_Q'$

$|\underline{v}_P| \cdot \cos\alpha = |\underline{v}_Q| \cdot \cos\beta$



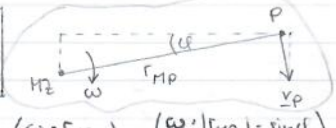
Starre Bewegung

Translation: Alle Geschw. sind parallel
$\Rightarrow \underline{v}_P = \underline{v}_Q = \underline{v} \quad (\forall P, Q)$

Rotation: $\Rightarrow \dfrac{v_P}{v_Q} = \dfrac{r_P}{r_Q} \quad \Rightarrow \omega = \dfrac{v_P}{r_P} = \dfrac{v_Q}{r_Q}$
$\underline{\omega} = \omega \cdot \underline{e}_z$ → positiv, wenn gegen den Uhrzeigersinn

Satz vom Momentanzentrum (SvM):

2D:	$v_P = \omega \cdot r_P$
3D:	$\underline{v}_P = \underline{\omega} \times \underline{r}_P$



$$\underline{v}_P = \begin{pmatrix} \omega \cdot r_{MP_y} \\ -\omega \cdot r_{MP_x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega \cdot |r_{MP_y}| \cdot \sin\varphi \\ -\omega \cdot |r_{MP_y}| \cdot \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Kinemate $\{\underline{v}_B, \underline{\omega}\}$

Invariante $\underline{I_1 = \omega}$; $\underline{I_2 = \omega \cdot v_P}$

Translation: $I_1 = \underline{0}$
Rotation: $I_1 \neq \underline{0} \wedge I_2 = 0$ } Ebene Bewegung
Schraubung: $I_2 \neq 0$

Kreiselung: › Räuml. Bew., wobei 1 Punkt fixiert ist
› momentan eine Rotation

Starrk.-Formel: $\boxed{\underline{v}_P = \underline{v}_B + \underline{\omega} \times \underline{r}_{BP}}$

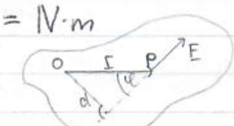
Kraft und Moment

Reaktionsprinzip: actio = reactio

$[\text{Kraft}] = N = \dfrac{m \cdot kg}{s^2}$; $[\text{Moment}] = N \cdot m$

Moment: $\boxed{\underline{M}_O = \underline{r}_{OP} \times \underline{F}}$

$M_O = \pm dF = |r_{OP}| \cdot |F| \cdot \sin\alpha$

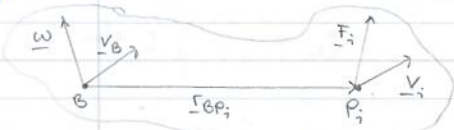


kein Moment: wenn Wirkungslinie durch Bezugspunkt

Leistung

$[\text{Leistung}] = W = \dfrac{Nm}{s}$

$P = \underline{F} \cdot \underline{v}_P$
reine Rotation: $P = \underline{M}_O \cdot \underline{\omega}$
Gesamtleistung: (Leistung einer KG) $\boxed{P = \Sigma P_i = \underline{R} \cdot \underline{v}_B + \underline{M}_B \cdot \underline{\omega}}$



leistungslos: $\underline{F} \perp \underline{v} \Rightarrow P = 0$

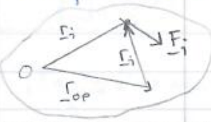
Statik

Kräftegruppe $\{\underline{F}_i\} = \{\underline{F}_1, \ldots, \underline{F}_n\}$

Resultierende: $\underline{R} = \Sigma \underline{F}_i$

Resultierendes Moment bzgl. O: $\underline{M}_O = \Sigma\, \underline{r}_i \times \underline{F}_i$

Transformationsregel: $\boxed{\begin{aligned} \underline{M}_P &= \underline{M}_O + \underline{r}_{PO} \times \underline{R} \\ \Leftrightarrow \underline{M}_O &= \underline{M}_P + \underline{r}_{OP} \times \underline{R} \end{aligned}}$



statische Äquivalenz: $P(\{F_i\}) = P(\{G_i\})$
↳ wenn resultierende Kraft und Moment ($\underline{R}$ und $\underline{M}_O$) beider KG gleich sind.

Dipolmoment einer KG: (unabhängig vom Bezugspunkt)

$\underline{N} = \Sigma F_i \cdot r_i \quad \Rightarrow \quad \underline{M} = \underline{N} \times \underline{e}$

$[\underline{R} = R \cdot \underline{e}\ ;\ R = \Sigma F_i\ ;\ \underline{M}_O = (\Sigma F_i \cdot r_i) \times \underline{e}]$

Dyname $\{\underline{R}, \underline{M}_0\}$

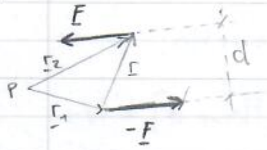
Reduktion: $\hat{=}$ Berechnung der Dyname aus d. KG
linienflüchtiger Vektor: (Angriffspunkt spielt keine Rolle)
↳ Kraft darf längs ihrer Wirkungsl. verschoben werden

$$\boxed{\underline{M}_0 = \left(\sum_k \underline{M}_k\right) + \left(\sum \underline{r}_{0J} \times \underline{F}_J\right)}$$

Invariante: $\underline{I}_1 = \underline{R}$; $\underline{I}_2 = \underline{R} \cdot \underline{M}_0$

→ Nullsystem: $\underline{I}_1 = \underline{0} \wedge \underline{M}_0 = \underline{0}$

→ Moment: (Kräftepaar) $\underline{I}_1 = \underline{0} \wedge \underline{M}_0 \neq \underline{0}$



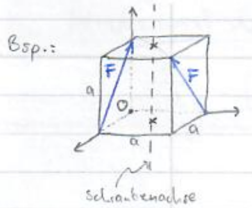
•) $\underline{M} = \underline{M}_0 = \underline{M}_P = (\underline{r}_2 - \underline{r}_1) \times \underline{F} = \underline{r} \times \underline{F}$

•) $|\underline{M}_0| = M_0 = d \cdot F$

→ Einzelkraft: $\underline{I}_1 \neq \underline{0} \wedge \underline{I}_2 = \underline{0}$

↳ Schraube: $\underline{I}_1 \neq 0 \wedge \underline{I}_2 \neq \underline{0}$

Bsp.:



$\underline{R} = (0, 0, \sqrt{2} F)$

$\underline{M}_0 = \left(\frac{a \cdot F}{\sqrt{2}}, \frac{-a \cdot F}{\sqrt{2}}, \frac{-a \cdot F}{\sqrt{2}}\right)$

$I_2 = -a \cdot F^2$

Kräfte- und Massenmittelpunkt

Schwerpunkt $\underline{r}_c$
› eines Körpers: $\underline{r}_c = \frac{1}{M} \int_B \underline{r} \, dm$

› System aus einzelnen Massepunkten: $\underline{r}_c = \frac{1}{M}\left(\sum m_i \cdot \underline{r}_i\right)$

› homogene Körper:

3D:	$\underline{r}_c = \frac{1}{V} \iiint_K \underline{r} \, dV$
2D:	$\underline{r}_c = \frac{1}{A} \iint_{K\ell} \underline{r} \, dA$
1D:	$\underline{r}_c = \frac{1}{L} \int_{Ks} \underline{r} \, ds$

› aus mehreren Teilkörpern zusammengesetzter homogener Körper: $\underline{r}_c = \frac{1}{V} \sum V_i \, \underline{r}_{c_i}$

Prinzip der virtuellen Leistungen (PdvL)

virtueller Bew.-Zustand: $\{\underline{\tilde{v}}_0, \underline{\tilde{\omega}}\}$ (nicht zulässige!)

Ein System befindet sich genau dann in einer Ruhelage, wenn die virtuelle Gesamtleistung der inneren & äusseren Kräfte bei jedem virtuellen Bew.-Zustand verschwindet.

PdvL: $\boxed{\tilde{\mathcal{P}} = \tilde{\mathcal{P}}^{(i)} + \tilde{\mathcal{P}}^{(a)} = \underline{0}}$ $\forall \{\underline{\tilde{v}}\}$

3D: $\mathcal{P} = \underline{F} \cdot \underline{v}$
2D: $\mathcal{P} = |\underline{F}| \cdot |\underline{v}| \cdot \sin\varphi$

Hauptsatz der Statik

(Ruhelage, wenn äussere Kräfte im Gleichgewicht)

$$\left.\boxed{\begin{array}{ll} KB(x,y,z): & \underline{R} = \underline{0} \\ MB(Ax.\, z): & \underline{M}_0 = \underline{0} \end{array}}\right\} \text{Gleichgewichts-bedingungen}$$

=> zur Berechnung v. Lager-/Bindungskräften

statische Bestimmtheit

u: # Bindungskomponenten (Kräfte und Momente)
n: # linear unabh. Gleichungen (GGWBD: 2D → 3, 3D → 6)

statisch unbestimmt: $u > n$ => klemmend!
↳ Grad d. Unbestimmtheit = $u - n$

↱ beweglich!

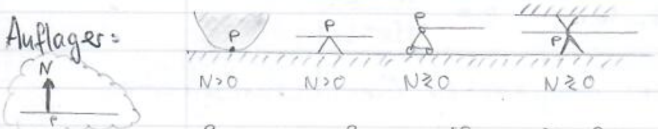
Kinem. unbestimmt: zulässige momentane Bewegungszustände sind möglich

Alternative: Solange Bindungen lösen bis (aber ohne!) kinem. unbest.
↳ "x" fach stat. unbestimmt

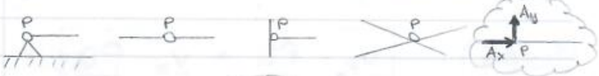
Bindungen (Einschränkung der Bewegungsfreiheit)

ausgeprägte Kräfte: als NICHT bekannt angenommen
Reibungsreaktionen: Bindungskräfte parallel zu zulässigen Bewegungen

Auflager:



Gelenk:

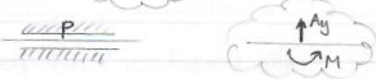


Einspannung:

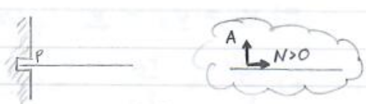
Pendelstütze: (keine Kraft am Stab)
↳ ähnlich wie Seil

Parallelführung:

Langes Querlager:



Längs- und kurzes Querlager:



Faden/Seil:

Reibung

μ_0: Haftreibungskoeffizient
μ_1: Gleitreibungskoeffizient
μ_2: Rollwiderstandslänge (im Haften & Gleiten dasselbe)

$\Big\rangle\ \mu_0 \geq \mu_1$

Haftreibung: $(v_B = 0)$ $\boxed{|\underline{F}| \leq \mu_0 \cdot |\underline{N}|}$

Gleitreibung: $(v_B \neq 0)$ $\boxed{|\underline{F}| = \mu_1 \cdot |\underline{N}|}$

$\underline{F} = -\mu_1 \cdot |\underline{N}| \cdot \frac{\underline{v}_B}{|\underline{v}_B|}$ => Unterlage bewegt sich

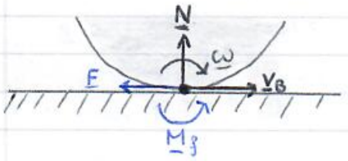
v_B := Relativgeschw. zur Unterlage

Rollwiderstand:

$(\omega = 0)$ $\boxed{|\underline{M}_f| \leq \mu_2 |\underline{N}|}$

$(\omega \neq 0)$ $\boxed{|\underline{M}_f| = \mu_2 |\underline{N}|}$

$\underline{M}_f = -\mu_2 \cdot |\underline{N}| \cdot \frac{\underline{\omega}}{|\underline{\omega}|}$



Ruhe:
- F (und M_f) aus GGB bestimmen
- Reibungsgesetz → diskutieren

Bewegung:
- F (und M_f) durch $\underline{N}, \mu_1, \mu_2$ bestimmt
- Reibungsgesetz → zusätzliche Gleichung

ideal rau: $\mu_0 = \infty$, $\mu_2 = 0$ => keine Verlustleistung
↳ ideales Zahnrad

Dynamik

Beschleunigung $(\underline{a} = \dot{\underline{v}} = \ddot{\underline{r}})$

Karth. KOS: $\underline{a} = \ddot{x}\underline{e}_x + \ddot{y}\underline{e}_y + \ddot{z}\underline{e}_z$

Zylinder KOS: $\underline{a} = (\ddot{\rho} - \underbrace{\rho\dot{\varphi}^2}_{\text{Zentripetal}})\underline{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + \underbrace{2\dot{\rho}\dot{\varphi}}_{\text{Coriolis (Trägheit)}})\underline{e}_\varphi + \ddot{z}\underline{e}_z$

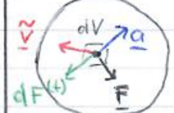
Ebene Polark: $\underline{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\underline{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\underline{e}_\varphi$

↓ zB

Kreisbewegung: $(r = \text{konst.})$ $\underline{a} = -r \cdot \dot{\varphi}^2 \underline{e}_r + r\ddot{\varphi}\underline{e}_\varphi$

[wobei: $r\dot{\varphi}^2 = \frac{v^2}{r}$]

Trägheitskräfte, PdvL (erweitert)



(spezifische Masse)
Dichte: $\rho = \frac{dm}{dV}$

Trägheitskraftdichte: $\underline{f}^{(t)} = -\rho\,\underline{a}$

Trägheitskraft: $d\underline{F}^{(t)} = \underline{f}^{(t)} \cdot dV = -\underline{a}\,dm$
(fiktive Kräfte → verletzen Reaktionsprinzip!)

(erweitertes) PdvL: $\boxed{\mathcal{P}^{(i)} + \mathcal{P}^{(a)} + \mathcal{P}^{(t)} = 0}$ $\quad \forall\{\tilde{\underline{v}}\}$

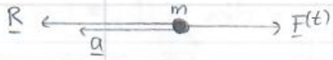
→ virtuelle Leistung der Trägheitskräfte

Inertialsystem: $\underline{v} = \text{konst.} \rightarrow \underline{a} = 0$
↳ kein Anteil an Trägheitskräfte

masselos modellierte Teilsysteme:
↳ liefern keinen Beitrag zu $\mathcal{P}^{(t)}$
↳ mit Methoden der Statik rechnen!

Trägheitskraft am Massenpunkt:

$$\underline{F}^{(t)} = \int d\underline{F}^{(t)} = -\int \underline{a}\,dm = -m \cdot \underline{a}$$



Bewegungsdifferentialgleichungen

Newtonsches Bew.-Gesetz: $\boxed{m \cdot \underline{a} = \underline{R}}$

Anfangsbedingungen: $\underline{r}(0) = \underline{r}_0$ und $\dot{\underline{r}}(0) = \underline{v}(0) = \underline{v}_0$

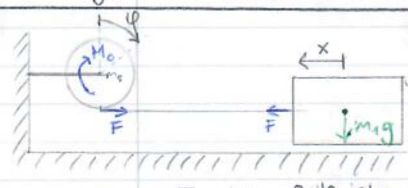
Anfangswertproblem: Newton & Anfagsbed. zusammen

kinem. Relation: Beschreiben Abhängigkeit zwischen versch. Koordinaten zueinander
↳ Tipp: häufig kann die Rollbedingung $\boxed{\dot{x} = r \cdot \dot{\varphi}}$ verwendet werden

Freiheitsgrad: $\boxed{f = n - b}$

n: # Lagekoordinaten
b: # kinematische Relationen

=> das System hat f Bew.Diff.-Gleichungen



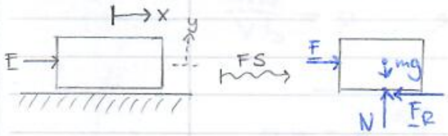
(Das Seil wird von der Rolle aufgerollt)

Änderung v. φ: $rF - M_0 \xrightarrow[\text{masselos}]{\text{Rolle ist}} = 0$
$\xrightarrow[\text{Drallsatz}]{\text{sonst}} = -M_R = -I_R\ddot{\varphi}$

kinem. Rel.: $x = r\varphi \Rightarrow \ddot{x} = r\ddot{\varphi}$

Massenmittelpunktsatz (MMS)

MMS: $\boxed{\underline{R} = m \cdot \underline{a}_c = m \cdot \ddot{\underline{r}}_c}$



$\Rightarrow MMS(\vec{x}): \; m \cdot \ddot{x} = F - F_R$

$\Rightarrow MMS(\vec{y}): \; m \cdot \ddot{y} = N - mg = 0$ (da Körper nicht abhebt)

Impulssatz

Impuls 'p': $\underline{p} = \iiint_B \underline{v} \, dm$

Satz: $\boxed{\dot{\underline{p}} = \underline{R}}$ (Für $\underline{R} = 0$ Bleibt Impuls konst.)

Drallsatz (DS)

Starre Rotation um den Punkt O:

Moment: $\underline{M}_0 = \iiint_B \underline{r} \times \underline{a} \, dm$

Drall: $\underline{L}_0 = \iiint_B \underline{r} \times \underline{v} \, dm$; $\boxed{L_0 = I_0 \cdot \omega}$

DS bzgl. Massenmittelpunkt: $\boxed{\dot{\underline{L}}_0 = \underline{M}_0}$

Umrechnungsformel zw. inertialem Punkt O und Massenmittelpunkt C

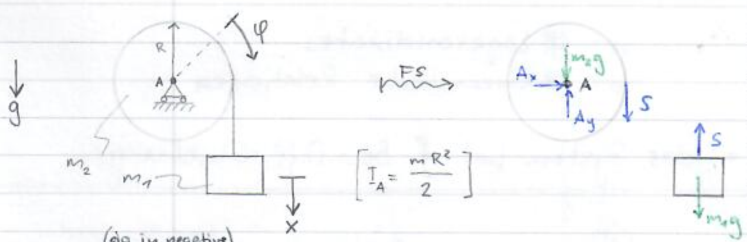
$\underline{L}_0 = \underline{r}_c \times \underline{p} + \underline{L}_c$

Drallsatz bzgl. Punkt A: $\boxed{M_A = I_A \cdot \dot{\omega} = I_A \cdot \ddot{\varphi}}$

↳ ⚠ Punkt A muss inertial sein (→nicht beschleunigt) ausser es handelt sich um den Massenmittelpunkt

$\Rightarrow I_A \cdot \ddot{\varphi} = M$

$\Rightarrow \cancel{I_B \cdot \ddot{\varphi} = M}$ (da B nicht inertial ist)



$\left[I_A = \frac{m R^2}{2} \right]$

(da in negative Richtung)

DS bzgl. A: $-\frac{m_2 R^2}{2} \ddot{\varphi} = -R \cdot S$

MMS: $m_1 \cdot \ddot{x} = m_1 \cdot g - S$

(Bogenlänge)

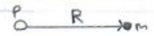
$R \cdot \varphi = x \longrightarrow R \ddot{\varphi} = \ddot{x}$

Massenträgheitsmoment I_p

I_p: gibt an wie "schwer" es ist den Körper um P zu drehen $\boxed{I_p = \iint r^2 dm}$

$I_c > I_B > I_c$

Massenpunkt: $\boxed{I_P = m R^2}$



homog. Kreisscheibe: $\boxed{I_p = \frac{1}{2} m R^2}$

Massenpunkt, Ring: $\boxed{I_p = m R^2}$ „Felge"

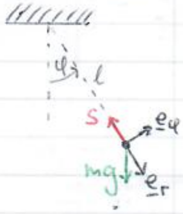
homog. Balken: $\boxed{I_p = \frac{1}{3} m L^2}$ (bzgl. Endpunkt)

$\boxed{I_p = \frac{1}{12} m L^2}$ (bzgl. Mittelpunkt)

Kugel (voll): $\boxed{I_p = \frac{2}{5} m R^2}$

Kugel (leer): $\boxed{I_p = \frac{2}{3} m R^2}$

Mathematisches Pendel:



$\omega = \sqrt{\frac{2g}{l}}$

> Komponenten von $\underline{a}$:
$a_\varphi = l \ddot{\varphi}$
$a_r = -l \dot{\varphi}^2$

> Newtonsches Gesetz in ... Richtung:
- tangential: $m l \ddot{\varphi} = -mg \sin\varphi$
- radial: $-m l \dot{\varphi}^2 = mg \cos\varphi - S$

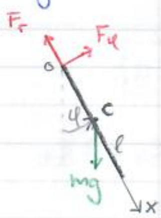
> Bew. Diff-Gleichung (aus tangential): $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin\varphi = 0$

> Ruhelagen: $\varphi(t) = \varphi_1 = 0$; $\varphi(t) = \varphi_2 = \pi$

hängende Ruhelage; stehende Ruhelage (metastabil)

Physikalisches Pendel: $(f = 1)$

$\omega = \sqrt{\frac{3g}{2l}}$



> MMS: - tang.: $m \frac{l}{2} \ddot{\varphi} = -mg \sin\varphi + F_\varphi$
- rad.: $m \frac{l}{2} \dot{\varphi}^2 = -mg \cos\varphi + F_r$

> Drallsatz (in z-Richtung):
$M_{0z} = I_0 \ddot{\varphi} = m \frac{l^2}{3} \ddot{\varphi} = -mg \frac{l}{2} \sin\varphi$

> Bew. Diff Gleichung: $\ddot{\varphi} + \frac{3g}{2l} \sin\varphi = 0$

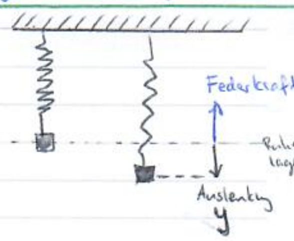
> Ruhelagen: (aus $\ddot{\varphi} = 0$) $\rightarrow \varphi_1 = 0, \; \varphi_2 = \pi$

Federkraft

(Jede Feder erhöht den Freiheitsgrad f um 1 !)

$\boxed{|F_K| = c \cdot x}$

⚠ - F_K als Zugkraft einführen
- f += 1 → zusätzl. Glchg



Lösungsansätze

Geschwindigkeitsberechnung an Systemen von starren Körpern

vgl.

> alle starren Körper bestimmen
> abwechselnd SdpG und SvM nutzen, um alle Geschw. zu bestimmen
> Lote auf Geschw. → MZ

- in Gelenken: v beider SK gleich
- in Auflagern: Richtung von v festgelegt
- rollende Räder: Auflagepunkt ≙ MZ

Best. der Wirkungslinie einer Einzelkraft.

Ges.: äquivalente Einzelkraft zu geg. KG

1.) $\underline{R}$ und $\underline{M}_0$ bestimmen (Punkt O beliebig)

2.) Einzelkraft hat dasselbe $\underline{R}$ und $\underline{M}_0$

↳ Hebelarm d: $d = \frac{M_0}{R}$

3.) Wirkungslinie ist also parallel zu R und besitzt Abstand d zum Bezugspunkt

⚠ beim VZ des Drehmoments

Fachwerkberechnung

vgl.

Werkzeuge: SdpG und SvM

1.) SK identifizieren
2.) Lagerungen
z.B. - Festlager: MZ bekannt
- Auflager: Richtung von v bekannt
3.) MZ bestimmen
4.) Winkelschnelligkeiten bestimmen

Tipp: Wenn die Richtung von v aus der Skizze ersichtlich ist, reicht es in der Rechnung nur den Betrag (Schnelligkeit) anzugeben

Stabkraft bestimmen

1.) Stab entfernen (Skizze)
↳ an beiden Knoten Zugkraft einführen
2.) Bew.zustand des Mechanismus bestimmen
3.) PdvL formulieren
↳ Leistungen aufsummieren, gleich 0 setzen
4.) nach Stabkraft auflösen
↳ $S > 0$: Zugstab
$S < 0$: Druckstab (Knickgefahr!)

Analytische Statik

1.) freischneiden, Kräfte einführen
> Gewichtskräfte greifen im Schwerpunkt an
> Seil- & Stabkräfte als Zugkraft
> Reibungskräfte **gegen** die Bew.-Richtung
> Normalkräfte senkrecht zur Berührungsebene (bei ausgedehnten Körpern ist der Angriffspunkt eine zusätzliche Unbekannte)
2.) zweckmässiges Koordinatensystem wählen
3.) GGB formulieren
4.) Gleichungen und Unbekannte zählen. Bei zu wenigen Gleichungen das System trennen und Schnittkräfte einführen.
5.) Alle Gleichungen auflösen
6.) Resultate diskutieren
> Seil ist gespannt, Zugkraft: $S > 0$
> Körper kippt nicht: $e \leq \frac{\ell}{2}$
> " hebt nicht ab: $N > 0$
> " bleibt in Ruhe: $|\underline{F}| \leq \mu_0 |\underline{N}|$

Dynamikprobleme lösen (alt)

1.) freischneiden, in allg. Lage Kräfte einführen
2.) zweckmässiges Koordinatensystem wählen
3.) kinematische Relationen aufstellen
4.) Diff. Gleichungen formulieren mit MMS und DS
5.) (Energiesatz aufstellen → E_{kin})
6.) Bindungskräfte **bestimmen** und aus den Bewegungsgleichungen eliminieren
7.) Anfangsbedingungen formulieren und gesuchte Grössen bestimmen
8.) Resultate diskutieren
> Eigenfrequenz: $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$
> Gleichgewichtslage: $\ddot{x} = 0$

Dynamikprobleme lösen ✓ (neu) → reicht für Prüfung

1.) Modellbildung, mat. System abgrenzen

2.) SK sinnvoll freischneiden

3.) Bindungskräfte, -momente und Lasten in allgemeiner Lage einführen

4.) Freiheitsgrad f bestimmen

5.) Für jeden Körper sinnvolles KoS wählen

6.) kinematische Relationen aufstellen

7.) Diff. Gleichungen aufstellen (mit MMS und DS)

8.) Bindungskräfte bestimmen und Bewegungsgleichungen auf Anzahl Freiheitsgrade reduzieren

9.) Anfangsbedingungen formulieren

Formeln

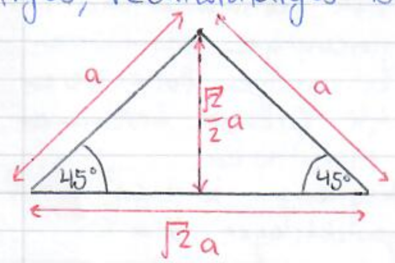
Trigonometrie

Grad	Rad	$\sin(\varphi)$	$\cos(\varphi)$	$\tan(\varphi)$
$0°$	0	0	1	0
$30°$	$\pi/6$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$45°$	$\pi/4$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$60°$	$\pi/3$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$90°$	$\pi/2$	1	0	(∞)
$120°$	$2\pi/3$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
$135°$	$3\pi/4$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
$150°$	$5\pi/6$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$180°$	π	0	-1	0

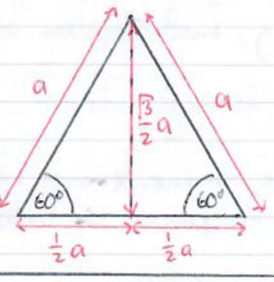
Kleinwinkelnäherung:

$\sin\varphi \approx \varphi \qquad \cos\varphi \approx 1 \qquad \tan\varphi \approx \varphi$

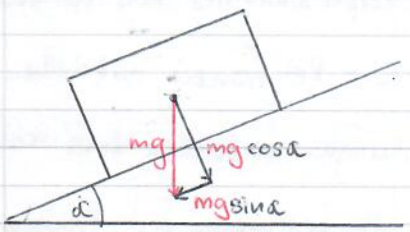
Gleichseitiges, rechtwinkliges Dreieck:



Gleichseitiges Dreieck:



Klotz auf einer Rampe:



Differentialgleichungen

$\ddot{x} = k \qquad x(t) = \frac{k}{2}t^2 + At + B$

$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad x(t) = A\cdot\cos(\omega t) + B\cdot\sin(\omega t)$

$\ddot{x} + \omega^2 x = k \qquad x(t) = A\cdot\cos(\omega t) + B\cdot\sin(\omega t) + \frac{k}{\omega^2}$

$\ddot{x} - \lambda^2 x = 0 \qquad x(t) = Ae^{\lambda t} + Be^{-\lambda t}$

A, B: Konstante aus Anfangsbedingungen

k: Inhomogenität

$\omega^2 = \frac{A}{m}$ bzw. $\frac{B}{m}$

Schwerpunkt ebener Flächen

	x_c	y_c
Rechteck	$\frac{x_1 + x_2}{2}$	$\frac{y_1 + y_2}{2}$
Dreieck	$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$	$\frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$
Halbkreis	0	$\frac{4}{3\pi}R$
Viertelkreis	$\frac{4}{3\pi}R$	$\frac{4}{3\pi}R$

Trägheitsmomente einfacher Körper

Massenpunkt mit Abstand R: $I = mR^2$

Stabmitte, Querachse: $I = \frac{ml^2}{12}$

Stabende, Querachse: $I = \frac{ml^2}{3}$

Rolle, Mittelpunkt: $I = \frac{mR^2}{2}$